Санкт-Петербургский государственный университет

ЕРШОВ Станислав Никитович

Выпускная квалификационная работа

О построении нестандартной динамической полугруппы на алгебре канонических антикоммутационных соотношений

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»
Образовательная программа СМ.5007. «Фундаментальные математика и механика»
Профиль: Теория функций

Научный руководитель: профессор кафедры математического анализа математико-механического факультета СПбГУ, доктор физико-математических наук, Амосов Г. Г.

Рецензент: ведущий научный сотрудник Отдела теории вероятностей и математической статистики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Широков. М. Е.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

ERSHOV Stanislav Nikitovich

Qualification Research Paper

On non-standard quantum dynamical semigroup on the algebra of canonical anticommutation relations

Education level: Specialist Degree program
Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics”
Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics”
Department: Function theory

Advisor: G. G. Amosov, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Mechanics, doctor of physical and mathematical sciences, professor

Reviewer: M. E. Shirokov, Department of Probability and Mathematical Statistics, Steklov Mathematical Institute, Leading Researcher, doctor of physical and mathematical sciences, professor RAS

Saint Petersburg
2019

Содержание

Аннотация

Мы рассматриваем пример нестандартной динамической полугруппы из статьи [6]. В разделе 2 мы приводим доказательство нестандартности этой полугруппы, которое упрощает доказательство из статьи [6].

В разделе 3.1 мы приводим стандартную конструкцию вполне положительной полугруппы на CAR-алгебре, заданную с помощью полугруппы сжатий на одночастичном пространстве. В разделе 4 мы доказываем стандартность таких полугрупп при некоторых предположениях на полугруппу сжатий в одночастичном пространстве. Как частный случай мы получаем один из результатов статьи [5].

В разделе 5 мы записываем решение уравнения теплопроводности в виде интегралов по путям винеровского процесса. Кроме того, полугруппа из статьи [6] представляется в виде интеграла по путям винеровского процесса. Далее строится динамическая полугруппа $\mathcal{T}_t$ на пространстве Фока, следуя идеологии примера из [6]. В разделе 6.3 рассматриваются сужения полугруппы $\mathcal{T}_t$ на некоторые подпространства и доказывается их нестандартность.

В разделе 6.4 содержатся продвижения в доказательстве нестандартности полугруппы $\mathcal{T}_t$.

1 Введение. Динамические полугруппы

Пусть у нас фиксировано сепарабельное гильбертово пространство H. Будем обозначать $B(H)$ — множество ограниченных операторов на H, $S(H)$ — множество ядерных операторов на H.

Определение 1 ([6])**.** Квантовой динамической полугруппой *называется полугруппа T_t нормальных вполне положительных отображений множества $B(H)$, такая, что $T_0 = \mathrm{Id}$, $T_t[I] \leqslant I$ и отображение $T_t[X]$ непрерывно по t в слабой операторной топологии для любого $X \in B(H)$.*

Определение 2 ([6])**.** *Каждой квантовой динамической полугруппе соответствует единственная предсопряжённая полугруппа S_t отображений множества ядерных операторов $S(H)$. Полугруппа S_t называется* квантовой динамической полугруппой в пространстве состояний *или* предсопряжённой динамической полугруппой.

Утверждение 1 ([8])**.** *Чтобы полугруппа S_t на $S(H)$ была квантовой динамической полугруппой в пространстве состояний необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) Сопряжённые отображения $T_t := (S_t)^*$ вполне положительны;

2) $\mathrm{Tr}\, S_t[\omega] \leqslant \mathrm{Tr}\, \omega$ для любого $\omega \in S(H)$, $\omega \geqslant 0$;

3) Полугруппа S_t сильно непрерывна: $S_t[\omega] \to \omega$ при $t \to 0$ для любого $\omega \in S(H)$.

Доказательство. Покажем, что из непрерывности $T_t[X]$ по t в слабой операторной топологии для любого $X \in B(H)$ следует сильная непрерывность полугруппы S_t.

Заметим, что из непрерывности $T_t[X]$ по t в слабой операторной топологии следует слабая непрерывность $S_t[\omega]$ по t для любого $\omega \in S(H)$. Из слабой непрерывности полугруппы следует сильная непрерывность (см [2], раздел 3.1.2).

В случае консервативных полугрупп сильную непрерывность полугруппы S_t можно было получить, применим результат из статьи [4]: если последовательность нормальных состояний на $B(H)$ сходится слабо, то она сходится и по норме. $\square$

Определение 3 ([6]). *Динамическая полугруппа в пространстве состояний S_t называется консервативной, если $\operatorname{Tr} S_t[\omega] = \operatorname{Tr}\omega$ для любых $t \geqslant 0$, $\omega \in S(H)$.*

Определение 4 ([6]). *Динамическая полугруппа T_t называется консервативной (или унитальной), если $T_t[I] = I$ для любого $t \geqslant 0$.*

Утверждение 2 ([8]). *Динамическая полугруппа T_t консервативна тогда и только тогда, когда предсопряжённая полугруппа S_t консервативна.*

Квантовые динамические полугруппы подробно рассматриваются в [8].

У любой предсопряжённой динамической полугруппы S_t орбиты $S_t[\omega]$ непрерывны по норме $S(H)$ для любого $\omega \in S(H)$. Из общей теории полугрупп в банаховом пространстве (см. [14] и [13]) следует, что существует плотно определённый замкнутый оператор $\mathcal{K}[\omega] := \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(S_t[\omega] - \omega)$, который называется *инфинитезимальным генератором* динамической полугруппы в пространстве состояний. При этом полугруппа однозначно задаётся своим генератором ([1]). Будем говорить, что полугруппа S_t непрерывна по норме, если $\|S_t - \mathrm{Id}\| \to 0$ при $t \to 0$. Полугруппа является непрерывной по норме тогда и только тогда, когда её генератор — ограниченный всюду определённый оператор (см. [14]).

Возникает вопрос описания генераторов динамических полугрупп. В случае непрерывных по норме консервативных полугрупп этот вопрос был решён Линдбладом в статье [12]. Приведём обобщение этого результата на случай произвольных непрерывных по норме полугрупп:

Теорема 3 ([9]). *Для того чтобы ограниченное отображение $\mathcal{K}\colon S(H) \to S(H)$ было генератором консервативной непрерывной по норме динамической полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathcal{K}[\omega] = \sum_j L_j \omega L_j^* - K\omega - \omega K^*, \quad \omega \in S(H) \tag{1}$$

где $L_j, K \in B(H)$ — ограниченные операторы, $M = M^*$, ряд $\sum L_j^* L_j$ сильно сходится и $\sum L_j^* L_j \leqslant K + K^*$.

В случае полугрупп, которые не являются непрерывными по норме, можно рассмотреть аналог уравнения Линдблада (1) (см. [7]).

А именно, пусть L_j — линейные операторы, заданные на плотном множестве D гильбертова пространства H. Пусть K — максимальный аккретивный оператор, заданный по крайней мере на множестве D (его область определения может быть больше D). Пусть также выполняется условие:

$$\sum_j \|L_j\psi\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{Re}\,\langle\psi|K|\psi\rangle\,, \quad \psi \in D. \tag{2}$$

Ещё мы будем предполагать, что D — инвариантное подпространство для полугруппы сжатий $\exp(-Kt)$, $t \geqslant 0$.

Будем искать динамические полугруппы T_t, удовлетворяющие уравнению Линдблада:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\langle\varphi|T_t[X]|\psi\rangle = \sum_j \langle L_j\varphi|T_t[X]|L_j\psi\rangle - \langle K\varphi|T_t[X]|\psi\rangle - \langle\varphi|T_t[X]|K\psi\rangle\,, \\ X \in B(H), \quad \varphi, \psi \in D.\end{gathered} \tag{3}$$

Определение 5. *Решение T_t^0 этого уравнения мы будем называть* минимальным*, если для любого другого решения T_t и любого $t \geqslant 0$ разность $T_t^0 - T_t$ является вполне положительным отображением.*

Теорема 4 ([7])**.** *При указанных выше условиях существует единственное минимальное решение уравнения* (3)*.*

Определение 6. *Минимальное решение уравнения* (3) *называется* стандартной динамической полугруппой*. Динамическая полугруппа, которая не получается как минимальное решение некоторого уравнения Линдблада, называется* нестандартной*.*

Возникает вопрос, бывают ли нестандартные динамические полугруппы. В статье Холево [6] приводится пример такой полугруппы. В данной работе мы построим аналог примера Холево на пространстве Фока.

Замечание. Оператор K замкнут. Из того, что D — инвариантное подпространство для полугруппы сжатий $\exp(-Kt)$, $t \geqslant 0$, следует, что замыкание оператора $K|_D$ совпадает с K (теорема X.49 из [13]). Исходя из соотношения (2), мы можем продолжить операторы L_j на $\mathrm{dom}\,K$ и заменить множество D на $\mathrm{dom}\,K$. Поэтому, не умаляя общности, мы можем считать, что $D = \mathrm{dom}\,K$.

Теорема 5. *Если минимальное решение T_t^0 уравнения Линдблада унитально, то не существует других (не минимальных) решений уравнения Линдблада.*

Доказательство. Пусть T_t — другое решение. Тогда $T_t - T_t^0$ вполне положительно для любого t и переводит I в ноль. Если положительное отображение переводит I в ноль, то оно переводит в ноль любой положительный оператор, который меньше I. Значит, оно переводит в ноль вообще любой оператор. Тогда $T_t - T_t^0 = 0$. □

Утверждение 6 ([6])**.** *Полугруппа $T_t[X]$ удовлетворяет уравнению (3) тогда и только тогда, когда генератор $\mathcal{K}$ предсопряжённой полугруппы $S_t[\omega]$ удовлетворяет соотношению*

$$\mathcal{K}[|\psi\rangle\langle\varphi|] = \sum_j |L_j\psi\rangle\langle L_j\psi| - |K\psi\rangle\langle\varphi| - |\psi\rangle\langle K\varphi|, \quad \varphi,\psi \in D. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть генератор $\mathcal{K}$ удовлетворяет соотношению (4). Тогда

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}|\psi\rangle\langle\varphi| T_t[X] = \operatorname{Tr}\mathcal{K}[|\psi\rangle\langle\varphi|]T_t[X],\\ X \in B(H), \quad \varphi,\psi \in D.\end{gathered} \tag{5}$$

Это в точности уравнение (3), записанное в другом виде.

Обратно, пусть $T_t[X]$ удовлетворяет уравнению (3). Пусть $\varphi,\psi \in D$, $\omega \coloneqq |\psi\rangle\langle\varphi|$, $\tau \coloneqq \sum\limits_j |L_j\psi\rangle\langle L_j\psi| - |K\psi\rangle\langle\varphi| - |\psi\rangle\langle K\varphi|$. Тогда из уравнения (3) следует

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}\omega T_t[X] = \operatorname{Tr}\tau T_t[X] \tag{6}$$

При $t = 0$ мы получаем

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr} S_t[\omega]X = \operatorname{Tr}\tau X. \tag{7}$$

Значит, $\frac{1}{t}(S_t[\omega]-\omega) \to \tau$ в слабой топологии на $S(H)$. Генераторы полугрупп в слабой и сильной топологии совпадают (см. [2], раздел 3.1.2), поэтому $\frac{1}{t}(S_t[\omega]-\omega) \to \tau$ в топологии $S(H)$, что мы и хотели. □

2 Пример Холево нестандартной динамической полугруппы

В статье [6] строится пример нестандартной динамической полугруппы. Приведём схему этого построения. Пусть $H = L^2(\mathbb{R}_+)$. Пусть $D = AC_0^2(\mathbb{R}_+)$ — множество дифференцируемых функций $\varphi(x)$, таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывна и $\varphi''(x) \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим операторы $L = \sqrt{2}\frac{d}{dx}$ и $K = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения D. Тогда условия теоремы 4 выполняются, значит, существует минимальное решение T_t^0 уравнения (3). В данном случае уравнение Линдблада (3) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\langle\varphi|T_t^0[X]|\psi\right\rangle = 2\left\langle\varphi'|T_t^0[X]|L_j\psi'\right\rangle + \left\langle\varphi''|T_t^0[X]|\psi\right\rangle + \left\langle\varphi|T_t^0[X]|K\psi''\right\rangle,\\ \varphi,\psi \in D.\end{gathered} \tag{8}$$

Полугруппа T_t^0 является стандартной неунитальной полугруппой. Рассмотрим её предсопряжённую полугруппу S_t^0, а также рассмотрим генератор предсопряжённой полугруппы $\mathcal{K}^0[\omega]$, $\omega \in S(H)$. Далее строится возмущение этого генератора:

$$\mathcal{K}[\omega] = \mathcal{K}^0[\omega] + \Theta \frac{d}{dx} \omega(x,x)|_{x=0}, \tag{9}$$

где Θ — произвольный оператор плотности. Этот генератор задаёт полугруппу S_t, также можно рассмотреть сопряжённую полугруппу T_t. Полугруппа T_t унитальна.

Построенная таким образом полугруппа T_t оказывается нестандартной. Приведём доказательство этого факта, которое упрощает доказательство из [6].

Предположим, что полугруппа T_t является стандартной, то есть пусть существуют такие операторы K, L_j, заданные на $\operatorname{dom} K$, что выполняются условия теоремы 4, и при этом T_t является минимальным решением уравнения Линдблада (3). По теореме 5 это единственное решение данного уравнения. Предсопряжённая полугруппа S_t является единственным решением уравнения Линдблада (4). Можно доказать, что для $\varphi, \psi \in \operatorname{dom} K$ выполняется равенство $\mathcal{K}[|\varphi\rangle\langle\psi|] = \mathcal{K}_0[|\varphi\rangle\langle\psi|]$ (лемма 6 из [6]). Поскольку уравнение Линдблада (4) задано только при $\varphi, \psi \in \operatorname{dom} K$, мы получаем отсюда, что S_t^0 тоже является решением этого же уравнения (4) с теми же операторами K, L_j. А с другой стороны, решение S_t должно быть единственным. Противоречие.

Таким образом, мы доказали нестандартность полугруппы S_t, не используя лемму 7 из [6].

3 Полугруппы на пространстве Фока

Пусть $H = L^2(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим антисимметричное пространство Фока $F(H) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{\otimes_a i}$. Заметим, что элементы $\eta_i \in H^{\otimes_a i}$ являются антисимметричными функциями от i переменных: $\eta_i = \eta_i(x_1, \ldots, x_i) \in L^2((\mathbb{R}_+)^i)$. Тогда произвольный элемент $\eta \in F(H)$ отождествляется с последовательностью функций $\eta_i \in L^2((\mathbb{R}_+)^i)$, для которой $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$.

Для функций $\eta \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ введём обозначение η' — обобщённая производная η вдоль направления $(1, \ldots, 1)$.

Пусть $D_i \subset H^{\otimes_a i}$ — множество таких антисимметричных функций $\eta(x_1, \ldots, x_i)$, которые удовлетворяют условиям:

1) $\eta, \eta'' \in L^2$,

2) $\eta|_{\partial(\mathbb{R}_+^i)} = 0$.

Замечание. Если $\eta, \eta'' \in L^2$, то $\eta' \in L^2$. Если $\eta, \eta' \in L^2$, то функцию η можно поменять на множестве меры ноль так, чтобы для любого $x \in \partial\mathbb{R}_+^i$ функция $\eta_x(z) \coloneqq \eta(x_1 + z, \ldots, x_i + z)$ была абсолютно непрерывной и занулялась в точке 0. В частности, корректно определено сужение на границу $\eta|_{\partial\mathbb{R}_+^i}$.

Например, $D_1 = AC_0^2(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим теперь

$$\mathcal{D} \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{\infty} D_i = \{f \in F(H) \mid f'' \in F(H), \forall i \quad f_i \in D_i\} \tag{10}$$

Нашей целью является построение нестандартной динамической полугруппы на пространстве Фока, основанной на идеологии примера Холево. Мы хотим провести «вторичную квантизацию» полугруппы Холево: построить динамическую полугруппу на $F(H)$, которая будет совпадать с невозмущённой полугруппой Холево на одночастичном пространстве.

Для начала мы определим, в каком смысле полугруппа должна совпадать с полугруппой Холево S_t^0 на одночастичном пространстве. Будем смотреть на предсопряжённые полугруппы, которые действуют на ядерных операторах.

Сначала поймём, как описываются операторы на $F(H)$. Пусть ω — некоторый оператор на $F(H)$. Любой оператор на $F(H)$ можно рассматривать как набор операторов $\omega_{ij}\colon H^{\otimes_a i} \to H^{\otimes_a j}$. В случае, когда ω — ядерный оператор, ω_{ij} можно отождествить с его ядром, то есть с функцией $\omega_{ij}(x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j)$, которая будет являться антисимметричной отдельно по $(x_1, \ldots, x_i)$ и по $(y_1, \ldots, y_j)$. При этом функции ω_{ij} будут лежать в L^2 (потому что любой ядерный оператор является оператором Гильберта–Шмидта).

Рассмотрим некоторый ядерный оператор $\omega = (\omega_{ij})_{i,j}$. Если все ω_{ij} равны нулю, кроме $\omega_{i_0 j_0}$, мы будем говорить, что ω имеет тип (i_0, j_0).

Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots) \in F(H)$. Если все f_i равны нулю, кроме f_{i_0}, мы будем говорить, что f имеет тип i_0.

Состояние $\omega \in S(F(H))$ типа $(1, 1)$ будем называть одночастичным.

Теперь пусть у нас есть динамическая полугруппа $\mathcal{S}_t$ на $F(H)$. Рассмотрим произвольное одночастичное состояние ω и рассмотрим $\omega^t \coloneqq \mathcal{S}_t[\omega]$. Мы хотим, чтобы $\omega_{11}^t = S_t^0[\omega_{11}]$, а ω_{ij}^t было равно нулю, если $\max(i, j) > 1$. В этом случае мы будем говорить, что $\mathcal{S}_t$ совпадает с невозмущённой полугруппой Холево S_t^0 на одночастичном пространстве.

3.1 Задание динамических полугрупп при помощи полугрупп на одночастичном пространстве

Пусть $\mathfrak{A}(H)$ — алгебра канонических антикоммутационных соотношений над сепарабельным одночастичным гильбертовым пространством H с генераторами $a(f)$, $a^*(g)$, $f, g \in H$. Генераторы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} a^*(f)a(g) + a(g)a^*(f) = (g, f)I, \\ a(f)a(g) + a(g)a(f) = a^*(f)a^*(g) + a^*(g)a^*(f) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

для любых $f, g \in H$. Мы будем отождествлять алгебру $\mathfrak{A}(H)$ с её представлением в пространстве Фока. Таким образом, $a^*(f)$ — оператор создания частицы, $a(f)$ — оператор аннигиляции. Замыкание $\mathfrak{A}(H)$ в сильной операторной топологии совпадает с

$B(F(H))$. Представление CAR-алгебры на пространстве Фока подробно рассматривается в [3].

В качестве одночастичного пространства мы будем рассматривать $H = L^2(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 7 ([10])**.** *Пусть H, K — гильбертовы пространства, R — сжатие из H в K (то есть R — оператор из H в K, и $\|R\| \leqslant 1$). Тогда существует единственное ограниченное унитальное линейное отображение $\mathcal{T}$ из $\mathfrak{A}_H$ в $\mathfrak{A}_K$, такое, что*

$$\begin{gathered} a^*(x_n)\cdots a^*(x_1)a(y_1)\cdots a(y_m) \mapsto a^*(Rx_n)\cdots a^*(Rx_1)a(Ry_1)\cdots a(Ry_m), \\ \text{для любых } x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m \in H. \end{gathered} \tag{12}$$

Более того, $\mathcal{T}$ является вполне положительным отображением, $\|\mathcal{T}\| = 1$.

Кроме того, эта конструкция переводит композицию операторов сжатия в композицию вполне положительных отображений.

При помощи теоремы 7 можно задавать динамические полугруппы на пространстве Фока: если R_t — полугруппа сжатий на одночастичном пространстве H, то для каждого R_t можно по теореме 7 построить вполне положительное отображение $\mathcal{T}_t$ на $\mathfrak{A}(H)$. Получается полугруппа $\mathcal{T}_t$ за исключением некоторых технических деталей: она задана на $\mathfrak{A}(H)$, а не на всём $B(F(H))$; необходимо проверять, что орбиты полугруппы непрерывны в слабой операторной топологии и что полугруппа состоит из нормальных отображений.

Лемма 8. *Пусть некоторое состояние ω удовлетворяет соотношению $\operatorname{Tr}\omega A = 0$ для любого $A \in \mathfrak{A}(H)$. Тогда $\omega = 0$.*

Доказательство. Нужно доказать равенство $\operatorname{Tr}\omega A = 0$ для любого $A \in B(F(H))$. Возьмём направленность $A_n \to A$, сходящуюся в сильной операторной топологии и ограниченную по норме (это возможно по теореме Капланского о плотности). Тогда $A_n \to A$ в ультраслабой операторной топологии. Но тогда $0 = \operatorname{Tr}\omega A_n \to \operatorname{Tr}\omega A$, откуда следует требуемое. □

Из леммы 8 следует, что если у отображения $\mathcal{T}$ на $\mathfrak{A}(H)$ есть предсопряжённое отображение $\mathcal{S}$ на $S(F(H))$, которое удовлетворяет соотношению $\operatorname{Tr}\mathcal{S}[\omega]A = \operatorname{Tr}\omega\mathcal{T}[A]$ для любых $\omega \in S(F(H))$, $A \in B(F(H))$, то такое предсопряжённое отображение определено однозначно.

Пусть P_n — проектор на $H^{\otimes_a n}$. Будем говорить, что оператор A имеет тип (i,j), если $A = P_j A P_i$.

Лемма 9. *Пусть $A = a^*(x_m)\cdots a^*(x_1)a(y_1)\cdots a(y_n)$. Тогда A является линейной комбинацией (сходящейся в сильной операторной топологии) операторов типов $(m+k, n+k)$, $k \geqslant 0$. Другими словами,*

$$A = \sum_k P_{m+k} A P_{n+k}, \tag{13}$$

где ряд сходится в сильной операторной топологии.

Доказательство. Достаточно заметить, что A переводит векторы f типа $n+k$ в векторы Af типа $m+k$. $\square$

Лемма 10. *Пусть A — ограниченный оператор типа (i,j). Тогда существует направленность A_α, $\sup\|A_\alpha\| < \infty$, такая, что $A_\alpha \to A$ в сильной операторной топологии (а следовательно, сходимость есть и в ультраслабой операторной топологии). При этом каждый A_α является конечной линейной комбинацией операторов вида $a^*(\xi_{j+k})\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_{i+k})$, $k \in \mathbb{Z}$, $\xi_r, \eta_q \in F(H)$.*

Доказательство. Применяя теорему Капланского о плотности, получаем, что существует ограниченная направленность $A_\alpha \in \mathfrak{A}(H)$, сходящаяся к A. Поскольку конечные линейные комбинации операторов вида $a^*(\xi_m)\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_n)$ плотны в $\mathfrak{A}(H)$, мы можем считать, что каждый оператор A_α является конечной линейной комбинацией таких операторов. Каждый оператор A_α распишем в виде

$$A_\alpha = \sum_{n,m \geqslant 0} A_{\alpha,n,m}, \tag{14}$$

где $A_{\alpha,n,m}$ является линейной комбинацией операторов вида $a^*(\xi_m)\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_n)$.

Рассмотрим

$$A'_\alpha \coloneqq \sum_{\substack{n,m \geqslant 0,\\ n-m=i-j}} P_m A_\alpha P_n, \tag{15}$$

Верна оценка на норму

$$\|A'_\alpha\| \leqslant \sup_{\substack{n,m \geqslant 0,\\ n-m=i-j}} \|P_m A_\alpha P_n\| \leqslant \|A_\alpha\|. \tag{16}$$

Таким образом, направленность A'_α ограничена по норме. Кроме того, она сходится в сильной операторной топологии к A. По лемме 9 мы получаем, что

$$A'_\alpha = \sum_{\substack{n,m \geqslant 0,\\ n-m=i-j}} A_{\alpha,n,m}. \tag{17}$$

То есть $A'_\alpha \in \mathfrak{A}(H)$. Значит, не умаляя общности, можно считать, что $A_\alpha = A'_\alpha$. Таким образом, мы нашли требуемые A_α. $\square$

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{T}$ построено по отображению R как в теореме 7. Пусть для $\mathcal{T}$ определено предсопряжённое отображение $\mathcal{S}$ (по лемме 8 оно единственно). Если ω имеет тип (i,j), то $\mathcal{S}[\omega]$ является линейной комбинацией операторов типов (i,j), $(i-1,j-1)$, $\dots(i-\min(i,j), j-\min(i,j))$.*

Доказательство. Достаточно доказывать для $\omega = |f_j\rangle\langle g_i|$, где f_j и g_i имеют типы j и i соответственно. Обозначим $\tau \coloneqq \mathcal{S}[\omega]$. Пусть $\tau_{mn} \neq 0$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Тогда найдутся векторы $x \coloneqq x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, $y \coloneqq y_1 \wedge \dots \wedge y_m$, такие, что $\operatorname{Tr} \tau\, |y\rangle\langle x| = \langle x|\tau|y\rangle \neq 0$.

Докажем от противного, что $m-n=i-j$. Пусть $m-n\neq i-j$. Применяя лемму 10, найдём направленность $A_\alpha\to|y\rangle\langle x|$, сходящуюся в ультраслабой операторной топологии, где каждый A_α является конечной линейной комбинацией операторов вида $a^*(\xi_{m+k})\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_{n+k})$, $k\in Z$. Тогда

$$\operatorname{Tr}\tau A_\alpha\to\operatorname{Tr}\tau A\neq 0. \tag{18}$$

Если мы докажем, что $\operatorname{Tr}\tau A_\alpha=0$, мы придём к противоречию. Поскольку каждый A_α является линейной комбинацией операторов вида $a^*(\xi_{m+k})\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_{n+k})$, $k\in Z$, достаточно доказать, что

$$\operatorname{Tr}\tau a^*(\xi_{m+k})\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_{n+k})=0. \tag{19}$$

Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\tau a^*(\xi_{m+k})\dots a^*(\xi_1)a(\eta_1)\dots a(\eta_{n+k})=\\&=\operatorname{Tr}\omega a^*(R\xi_{m+k})\dots a^*(R\xi_1)a(R\eta_1)\dots a(R\eta_{n+k})=\\&=\operatorname{Tr}|f_j\rangle\langle g_i|\,a^*(R\xi_{m+k})\dots a^*(R\xi_1)a(R\eta_1)\dots a(R\eta_{n+k})=\\&=\langle g_i|a^*(R\xi_{m+k})\dots a^*(R\xi_1)a(R\eta_1)\dots a(R\eta_{n+k})\dots a(Rx_1)|f_j\rangle=0,\end{aligned} \tag{20}$$

если $m-n\neq i-j$. Противоречие. То есть мы доказали, что $m-n=i-j$.

Осталось доказать, что $m\geqslant i$. Пусть это не так. Рассмотрим

$$\alpha=a(x_n)\dots a(x_1)\tau a^*(y_1)\dots a^*(y_m). \tag{21}$$

Заметим, что $\alpha_{00}=\operatorname{Tr}\tau\,|y\rangle\langle x|\neq 0$. То есть $\alpha\neq 0$. По лемме 8 мы получаем, что существует $B\in\mathfrak{A}(H)$, такой, что $\operatorname{Tr}\alpha B\neq 0$. Теперь

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\alpha B&=\operatorname{Tr}a(x_n)\dots a(x_1)\tau a^*(y_1)\dots a^*(y_m)B=\\&=\operatorname{Tr}\tau a^*(y_1)\dots a^*(y_m)Ba(x_n)\dots a(x_1)=\\&=\operatorname{Tr}\omega a^*(Ry_1)\dots a^*(Ry_m)\mathcal{T}[B]a(Rx_n)\dots a(Rx_1)=\\&=\operatorname{Tr}a(Rx_n)\dots a(Rx_1)\omega a^*(Ry_1)\dots a^*(Ry_m)\mathcal{T}[B]=0,\end{aligned} \tag{22}$$

потому что

$$a(Rx_n)\dots a(Rx_1)\omega a^*(Ry_1)\dots a^*(Ry_m)=0. \tag{23}$$

Получилось противоречие. □

Теперь мы хотим применить конструкцию из теоремы 7 для построения вторичной квантизации полугруппы Холево S_t^0. То есть мы хотим, чтобы на одночастичном пространстве полугруппы совпадали в том смысле, который описывался выше. Однако это не получается сделать по следующей причине:

Теорема 12. *Пусть мы построили полугруппу $\mathcal{T}_t$ (а также предсопряжённую полугруппу $\mathcal{S}_t$) по полугруппе сжатий R_t на одночастичном пространстве, следуя конструкции из теоремы 7. Пусть $\eta\in H\subset F(H)$ — некоторое одночастичное состояние. Рассмотрим $\omega=|\eta\rangle\langle\eta|$. Тогда $\mathcal{S}_t[\omega]=|R_t^*\eta\rangle\langle R_t^*\eta|+(1-\|R_t^*\eta\|^2)\Omega$, где Ω — вакуумное состояние в $F(H)$.*

Доказательство. Обозначим $\tau_t \coloneqq |R_t^*\eta\rangle\langle R_t^*\eta| + (1-\|R_t^*\eta\|^2)\Omega$. Достаточно проверить, что $\operatorname{Tr}\tau_t a^*(x_1)\dots a^*(x_n)a(y_1)\dots a(y_m) = \operatorname{Tr}\omega a^*(R_t x_1)\dots a^*(R_t x_n)a(R_t y_1)\dots a(R_t y_m)$ для любых $a^*(x_1)\dots a^*(x_n)a(y_1)\dots a(y_m)$.

Мы проверим равенство $\operatorname{Tr}\tau_t a^*(x)a(y) = \operatorname{Tr}\omega a^*(R_t x)a(R_t y)$, остальные равенства проверяются аналогично.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\tau_t a^*(x)a(y) &= \operatorname{Tr}|R_t^*\eta\rangle\langle R_t^*\eta|\, a^*(x)a(y) = \\
&= \langle a(y)R_t^*\eta | a(x)R_t^*\eta\rangle = \\
&= \langle y|R_t^*\eta\rangle\langle x|R_t^*\eta\rangle = \\
&= \langle R_t y|R_t\eta\rangle\langle R_t x|R_t\eta\rangle = \\
&= \langle a(R_t y)\eta | a(R_t x)\eta\rangle = \\
&= \operatorname{Tr}\omega a^*(R_t x)a(R_t y).
\end{aligned} \tag{24}$$

□

То есть получается, что чистое состояние $|\eta\rangle\langle\eta|$ переводится в смесь чистого одночастичного состояния и вакуумного состояния. Однако невозмущённая полугруппа Холево переводит чистые состояния в смешанные более сложной природы ([6]).

Тем не менее, воспроизвести пример Холево на одночастичном пространстве можно, если использовать интегралы вполне положительных отображений, построенных согласно теореме 7. Сначала мы научимся представлять S_t^0 в виде интеграла отображений, каждое из которых переводит чистые состояния в операторы ранга 1.

4 О стандартности полугрупп, заданных с помощью полугруппы сжатий на одночастичном пространстве

Пусть $C_t \coloneqq e^{-tT}$ — полугруппа сжатий на некотором гильбертовом пространстве H. В этом разделе мы будем предполагать, что выполняется одно из двух условий:

1) T — нормальный оператор;

2) T — ограниченный оператор.

Согласно теореме 7 полугруппе сжатий C_t соответствует полугруппа $\mathcal{C}_t^0$ вполне положительных отображений на $\mathfrak{A}(H)$. Выполняется соотношение

$$\mathcal{C}_t^0[a^*(x_1)\dots a^*(x_k)a(y_1)\dots a(y_l)] = a^*(C_t x_1)\dots a^*(C_t x_k)a(C_t y_1)\dots a(C_t y_l). \tag{25}$$

В этом разделе мы докажем, что эта полугруппа продолжается до стандартной динамической полугруппы на $B(F(H))$.

Пусть $T = T_1 + iT_2$, где T_1, T_2 — самосопряжённые операторы. Такое разложение существует, в частности, если T нормальный или T ограничен.

Пусть $\widetilde{C}_t$ — полугруппа сжатий на $F(H)$, заданная на разложимых векторах следующим образом:

$$\widetilde{C}_t(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n) = C_t\eta_1 \wedge \ldots C_t\eta_n. \tag{26}$$

Пусть $\widetilde{T}$ — генератор полугруппы $\widetilde{C}_t$. Тогда $\widetilde{T}$ удовлетворяет соотношению

$$\widetilde{T}(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n) = \sum_i \eta_1 \wedge \ldots \wedge T\eta_i \wedge \ldots \wedge \eta_n \tag{27}$$

для $\eta_i \in \operatorname{dom} T$. Аналогично определим $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$. Тогда операторы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ самосопряжены. При этом

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2. \tag{28}$$

Пусть $H_1 \subset H_2 \ldots \subset H$ — цепочка замкнутых подпространств, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = H$. Пусть H_i — инвариантные подпространства для T_1 и T_2, причём T_1 и T_2 ограничены на H_i. Например, если T нормальный, существование таких подпространств следует из спектрального разложения для T. Если T ограниченный, достаточно взять $H_i = H$.

Пусть P_n — проектор на H_n, $\widetilde{P}_n$ — проектор на $F(H_n)$. Пусть $T_n \coloneqq TP_n$. Пусть $F_m(H) \coloneqq \sum\limits_{i=0}^{m} H^{\otimes_a i}$. Пусть $F_{m,n}(H) \coloneqq \widetilde{P}_n F_m(H)$. Тогда $F_{m,n}(H)$ —инвариантное подпространство для $\widetilde{T}$. Оператор $\widetilde{T}$ ограничен на $F_{m,n}(H)$. Пусть $\widetilde{P}_{m,n}$ — проектор на $F_{m,n}(H)$. Пусть $\widetilde{T}_{m,n} \coloneqq \widetilde{P}_{m,n}\widetilde{T}\widetilde{P}_{m,n}$, $\widetilde{T}_{1,m,n} \coloneqq \widetilde{P}_{m,n}\widetilde{T}_1\widetilde{P}_{m,n}$ и $\widetilde{T}_{2,m,n} \coloneqq \widetilde{P}_{m,n}\widetilde{T}_2\widetilde{P}_{m,n}$. Пусть $a_{m,n}(x) \coloneqq \widetilde{P}_{m,n}a(x)\widetilde{P}_{m,n}$.

Для $x \in H$ определим оператор $b^*(x)$ следующим образом:

$$b^*(x)\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n \coloneqq \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n \wedge x. \tag{29}$$

Заметим, что $b^*(x)$ коммутирует с $a^*(y)$ для любых $x, y \in H$. Оператор $b(x)$ определяется как оператор, сопряжённый к $b^*(x)$. Оператор $b(x)$ коммутирует с $a(y)$ для любых $x, y \in H$.

Пусть $b_{m,n}(x) \coloneqq \widetilde{P}_{m,n}b(x)\widetilde{P}_{m,n}$.

Пусть e_j — ортонормированный базис, причём $e_j \in \operatorname{dom} T_1^{1/2}$.

Лемма 13.

$$T_{1,m,n} = \sum_j |T_{1,m,n}^{1/2} e_j\rangle \langle T_{1,m,n}^{1/2} e_j|, \tag{30}$$

где ряд сходится в сильной операторной топологии.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_j |T_{1,m,n}^{1/2} e_j\rangle \langle T_{1,m,n}^{1/2} e_j| &= \sum_j T_{1,m,n}^{1/2} |e_j\rangle \langle e_j| T_{1,m,n}^{1/2} = \\ &= T_{1,m,n}^{1/2} \left(\sum_j |e_j\rangle \langle e_j| \right) T_{1,m,n}^{1/2} \to T_{1,m,n}. \end{aligned} \tag{31}$$

□

Пусть $L_j \coloneqq \sqrt{2}a(T_1^{1/2}e_j)$, $K \coloneqq \widetilde{T}^*$.

Лемма 14.

$$\sum_j a^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)a_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) = \widetilde{T}_{1,m,n}. \tag{32}$$

Доказательство. Следует из леммы 13. □

Следствие 15.

$$\sum_j b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) = \widetilde{T}_{1,m,n}. \tag{33}$$

Лемма 16.

$$\sum_j \|L_j\varphi\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{Re}\,\langle K\varphi|\varphi\rangle \tag{34}$$

для любого $\varphi \in \operatorname{dom} K$.

Доказательство. Для $\varphi \in F_{m,n}(H)$ по лемме 14 мы получаем

$$\sum_j \|L_j\varphi\|^2 = \sum_j 2\left\langle b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\varphi, \varphi\right\rangle = 2\left\langle \widetilde{T}_1\varphi|\varphi\right\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle K\varphi|\varphi\rangle\,. \tag{35}$$

Для остальных φ можно рассмотреть $\varphi_{m,n} \coloneqq P_{m,n}\varphi$, сделать предельный переход и применить лемму Фату. □

Таким образом, можно рассмотреть уравнение Линдблада

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\langle\varphi|\mathcal{C}_t[X]|\psi\rangle = \\ &= 2\sum_j\left\langle b(T_1^{1/2}e_j)\varphi\right|\mathcal{C}_t[X]\left|b(T_1^{1/2}e_j)\psi\right\rangle - \left\langle\widetilde{T}^*\varphi\,|\mathcal{C}_t[X]|\psi\right\rangle - \left\langle\varphi|\mathcal{C}_t[X]|\widetilde{T}^*\psi\right\rangle,\end{aligned} \tag{36}$$

$$X \in B(H), \quad \varphi,\psi \in \operatorname{dom}\widetilde{T}^*.$$

Это уравнение будет иметь решение по теореме 4. Обозначим это решение $\mathcal{C}_t$. Предсопряжённую полугруппу обозначим $\mathcal{B}_t$. Генератор предсопряжённой полугруппы обозначим $\mathcal{K}[\omega]$. Тогда генератор предсопряжённой полугруппы удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{K}[|\varphi\rangle\langle\psi|] = 2\sum_j |b(T_1^{1/2}e_j)\varphi\rangle\langle b(T_1^{1/2}e_j)\psi| - |\widetilde{T}^*\varphi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle\widetilde{T}^*\psi|\,. \tag{37}$$

для любых $\psi,\varphi \in \operatorname{dom}\widetilde{T}^*$.

Зафиксируем некоторые натуральные числа n и m. Рассмотрим подпространство $F_{m,n}(H)$.

Для $\varphi,\psi \in F_{m,n}(H)$ из уравнения 37 мы получаем

$$\mathcal{K}[|\varphi\rangle\langle\psi|] = 2\sum_j |b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\varphi\rangle\langle b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\psi| - |\widetilde{T}^*_{m,n}\varphi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle\widetilde{T}^*_{m,n}\psi|\,. \tag{38}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\mathcal{K}[|\varphi\rangle\langle\psi|] = 2\sum_j b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\,|\varphi\rangle\langle\psi|\, b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) - \widetilde{T}^*_{m,n}\,|\varphi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle\psi|\,\widetilde{T}_{m,n}. \tag{39}$$

Следовательно, если ω — произвольный ядерный оператор на $F_{m,n}(H)$, мы можем рассмотреть его разложение Гильберта–Шмидта $\omega = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\psi_i|$ и, применив уравнение (37), получить

$$\mathcal{K}[\omega] = 2\sum_j b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\omega b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) - \widetilde{T}^*_{m,n}\omega - \omega\widetilde{T}_{m,n} \tag{40}$$

для любого $\omega \in S(F_{m,n}(H))$. Таким образом, сужение генератора полугруппы $\mathcal{B}_t$ на $S(F_{m,n}(H))$ является всюду определённым ограниченным оператором. Из единственности слабого решения дифференциального уравнения (см. [1]) следует, что тогда подпространство $S(F_{m,n}(H))$ инвариантно для $\mathcal{B}_t$ и сужение $\mathcal{B}_t$ на $S(F_{m,n}(H))$ является полугруппой с ограниченным генератором. При этом генератор задаётся уравнением (40). Полугруппа однозначно задаётся своим генератором, поэтому сужение полугруппы $\mathcal{B}_t$ на $S(F_{m,n}(H))$ единственно. Поскольку $\bigcup_{m,n} S(F_{m,n}(H))$ плотны в $S(F(H))$, сама полугруппа $\mathcal{B}_t$ единственна. Значит, сопряжённая полугруппа $\mathcal{C}_t$ единственна. Итак, мы доказали, что решение уравнения (36) единственно.

Пусть $[X,Y] \coloneqq XY - YX$.

Лемма 17. *Выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a^*_{m,n}(C_t x) &= -[\widetilde{T}_{m,n}, a^*_{m,n}(C_t x)], \\ \frac{d}{dt}a_{m,n}(C_t x) &= [\widetilde{T}^*_{m,n}, a_{m,n}(C_t x)]. \end{aligned} \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $i < m$, тогда

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}a^*_{m,n}(C_t x)\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_i = \\ &= (TP_n x) \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_i = \\ &= \widetilde{T}_{m,n}((P_n x) \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_i) - (P_n x) \wedge \widetilde{T}_{m,n}(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_i). \end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда следует первое равенство. Второе равенство является сопряжённым к первому. □

Пусть $A_t \coloneqq a^*_{m,n}(C_t x_1)\ldots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)\ldots a_{m,n}(C_t y_l)$.

Лемма 18.

$$\frac{d}{dt}A_t \coloneqq 2\sum_j b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)A_t b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) - \widetilde{T}_{m,n}A_t - A_t\widetilde{T}^*_{m,n}, \tag{43}$$

где ряд сходится в сильной операторной топологии.

Доказательство. Перепишем одно из слагаемых в правой части в виде

$$
\begin{aligned}
&2\sum_j b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)A_t b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) = \\
&= a^*_{m,n}(x_1)\dots a^*_{m,n}(x_k)\left(2\sum_j b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\right)a_{m,n}(y_1)\dots a_{m,n}(y_l) = \\
&= 2a^*_{m,n}(x_1)\dots a^*_{m,n}(x_k)\mathcal{T}_{1,m,n}a_{m,n}(y_1)\dots a_{m,n}(y_l).
\end{aligned} \tag{44}
$$

Таким образом, правая часть (43) переписывается в виде $I_1+I_2+I_3$, где

$$
\begin{aligned}
&I_1 := [-\widetilde{T}_{1,m,n}, a^*_{m,n}(C_t x_1)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)\dots a_{m,n}(C_t y_l) + \\
&+ a^*_{m,n}(C_t x_1)[-\widetilde{T}_{1,m,n}, a^*_{m,n}(C_t x_2)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)\dots a_{m,n}(C_t y_l) + \\
&\dots \\
&+ a^*_{m,n}(C_t x_1)\dots[-\widetilde{T}_{1,m,n}, a^*_{m,n}(C_t x_k)]a_{m,n}(C_t y_1)\dots a_{m,n}(C_t y_l).
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_2 := a^*_{m,n}(C_t x_1)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)[\widetilde{T}_{1,m,n}, a_{m,n}(C_t y_1)]\dots a_{m,n}(C_t y_l) + \\
&+ a^*_{m,n}(C_t x_1)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)[\widetilde{T}_{1,m,n}, a_{m,n}(C_t y_2)]\dots a_{m,n}(C_t y_l) + \\
&\dots \\
&+ a^*_{m,n}(C_t x_1)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)a_{m,n}(C_t y_2)\dots[\widetilde{T}_{1,m,n}, a_{m,n}(C_t y_l)].
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_3 := [-i\widetilde{T}_{2,m,n}, a^*_{m,n}(C_t x_1)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)\dots a_{m,n}(C_t y_l) + \\
&+ a^*_{m,n}(C_t x_1)[-i\widetilde{T}_{2,m,n}, a^*_{m,n}(C_t x_2)]\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)\dots a_{m,n}(C_t y_l) + \\
&\dots \\
&+ a^*_{m,n}(C_t x_1)\dots a^*_{m,n}(C_t x_k)a_{m,n}(C_t y_1)\dots[-i\widetilde{T}_{2,m,n}, a_{m,n}(C_t y_l)].
\end{aligned} \tag{47}
$$

Осталось применить лемму 17. □

Пусть $\widetilde{B}_{m,n,t}$ — сужение полугруппы $\widetilde{B}_t$ на $S(F_{m,n}(H))$. Пусть полугруппе $\widetilde{B}_{m,n,t}$ соответствует сопряжённая полугруппа $\widetilde{C}_{m,n,t}$. Генератор полугруппы $\widetilde{C}_{m,n,t}$ ограничен. Для $\widetilde{C}_{m,n,t}$ из уравнения (40) следует, что

$$
\frac{d}{dt}\widetilde{C}_{m,n,t}[A] := 2\sum_j b^*_{m,n}(T_1^{1/2}e_j)\widetilde{C}_{m,n,t}[A]b_{m,n}(T_1^{1/2}e_j) - \widetilde{T}_{m,n}\widetilde{C}_{m,n,t}[A] - \widetilde{C}_{m,n,t}[A]\widetilde{T}_{m,n}. \tag{48}
$$

Следовательно, отсюда, а также из леммы 18 и из единственности решения дифференциального уравнения (см. [1]) мы получаем, что

$$
\widetilde{C}_{m,n,t}[A] = A_t. \tag{49}
$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr} \widetilde{B}_t[\omega] a^*_{m,n}(x_1) \dots a^*_{m,n}(x_k) a_{m,n}(y_1) \dots a_{m,n}(y_l) = \\
&= \operatorname{Tr} \omega \widetilde{C}_{m,n,t}[a^*_{m,n}(x_1) \dots a^*_{m,n}(x_k) a_{m,n}(y_1) \dots a_{m,n}(y_l)] = \\
&= \operatorname{Tr} \omega a^*_{m,n}(C_t x_1) \dots a^*_{m,n}(C_t x_k) a_{m,n}(C_t y_1) \dots a_{m,n}(C_t y_l)
\end{aligned} \tag{50}$$

для $\omega \in S(F_{m,n}(H))$. Поскольку

$$a^*_{m,n}(x_1) \dots a^*_{m,n}(x_k) a_{m,n}(y_1) \dots a_{m,n}(y_l) = \widetilde{P}_{m,n} a(x_1) \dots a(x_k) a(y_1) \dots a(y_l) \widetilde{P}_{m,n}, \tag{51}$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr} \widetilde{B}_t[\omega] a(x_1) \dots a(x_k) a(y_1) \dots a(y_l) = \\
&= \operatorname{Tr} \omega a^*(C_t x_1) \dots a^*(C_t x_k) a(C_t y_1) \dots a(C_t y_l)
\end{aligned} \tag{52}$$

для $\omega \in S(F_{m,n}(H))$. Поскольку $\bigcup\limits_{m,n} S(F_{m,n}(H))$ плотно в $S(F(H))$, мы с помощью предельного перехода получаем соотношение

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr} \widetilde{B}_t[\omega] a(x_1) \dots a(x_k) a(y_1) \dots a(y_l) = \\
&= \operatorname{Tr} \omega a^*(C_t x_1) \dots a^*(C_t x_k) a(C_t y_1) \dots a(C_t y_l)
\end{aligned} \tag{53}$$

для любого $\omega \in S(F(H))$.

Итак, мы доказали, что полугруппа $\mathcal{B}_t$ является предсопряжённой для полугруппы $\mathcal{C}^0_t$, заданной на $\mathfrak{A}(H)$. Следовательно, $\mathcal{C}^0_t$ совпадает с сужением $\mathcal{C}_t$ на $\mathfrak{A}(H)$. Итак, $\mathcal{C}^0_t$ продолжается на всю алгебру $B(F(H))$ до полугруппы $\mathcal{C}_t$.

Поскольку полугруппа $\mathcal{B}_t$ является предсопряжённой для $\mathcal{C}^0_t$, по лемме 8 мы получаем, что такая предсопряжённая полугруппа единственна. Следовательно, продолжение $\mathcal{C}^0_t$ до динамической полугруппы на $B(F(H))$ тоже единственно и совпадает с $\mathcal{C}_t$. Более того, это продолжение является стандартной динамической полугруппой.

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 19. *Пусть C_t — полугруппа сжатий на H с инфинитезимальным генератором T, который удовлетворяет одному из двух условий:*

1) T — нормальный оператор;

2) T — ограниченный оператор.

Пусть полугруппа $\mathcal{C}^0_t$ на $\mathfrak{A}(H)$ определена согласно теореме 7. Тогда полугруппа $\mathcal{C}^0_t$ единственным образом продолжается до динамической полугруппы $\mathcal{C}_t$ на $B(F(H))$. Полугруппа $\mathcal{C}_t$ является единственным решением уравнения Линдблада (36)*, а следовательно, $\mathcal{C}_t$ — стандартная динамическая полугруппа.*

Лемма 20. *Пусть T — ядерный оператор. Тогда оператор $\widetilde{T}$ ограничен.*

Доказательство. Пусть $T = T_1 + iT_2$, где T_1, T_2 самосопряжены. Поскольку T ядерный, тогда T_1 и T_2 тоже ядерные. При этом $\widetilde{T} = \widetilde{T}_1 + i\widetilde{T}_2$. Значит, достаточно доказать, что $\widetilde{T}_1$ ограничен. Пусть собственные числа оператора T_1 равны λ_i. Тогда оператор $\widetilde{T}_1$ самосопряжён, компактен, и его собственные числа равны $\sum\limits_j a_{l_j}$ для конечных наборов l_j. Суммы $\sum\limits_j a_{l_j}$ ограничены, потому что оператор T ядерный. □

Теперь мы можем доказать теорему из статьи [5]:

Теорема 21 ([5]). *Пусть T — ядерный оператор. Пусть полугруппа $\mathcal{C}_t^0$ на $\mathfrak{A}(H)$ определена согласно теореме 7. Тогда генератор полугруппы $\mathcal{C}_t^0$ ограничен.*

Доказательство. По лемме 20 оператор $\widetilde{T}$ ограничен. Следовательно, согласно уравнению (37) генератор предсопряжённой полугруппы $\mathcal{B}_t$ определён и ограничен на всех операторах ранга 1. Значит, он определён и ограничен на всех ядерных операторах. Получается, что предсопряжённая полугруппа имеет ограниченный генератор. Тогда полугруппа $\mathcal{C}_t^0$ тоже имеет ограниченный генератор. □

5 Отображение сдвига, винеровский процесс, решение уравнения теплопроводности на полупрямой

Определим сначала R_t как сдвиг вправо на t: если $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, то

$$R_t(f)(x) \coloneqq \begin{cases} f(x-t), & x \geqslant t; \\ 0, & x < t. \end{cases} \tag{54}$$

Если $t < 0$, это сжимающее отображение, а если $t > 0$, это изометрия. Аналогично R_t будет действовать на функции от нескольких переменных: если $f\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$, то

$$R_t(f)(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \begin{cases} f(x_1 - t, \dots, x_n - t), & x_1, \dots, x_n \geqslant t; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{55}$$

Поскольку ядерные операторы отождествляются с их ядрами, мы можем считать, что R_t задано и на ядерных операторах тоже. Мы хотим показать, что отображение S_t^0 является интегралом отображений $R_x \circ R_y$ по некоторой мере. Заметим, что $R_x \circ R_y$ как отображение, заданное на ядерных операторах, переводит чистые состояния в операторы ранга 1.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C([0,\infty))$. На этом пространстве можно задать вероятностную меру Винера, которую мы будем обозначать μ (см. [11]). Эта мера соответствует винеровскому процессу. Фиксируем некоторое t и посмотрим на траектории винеровского процесса на отрезке $[0, 2t]$. Для каждой такой траектории h можно вычислить значения

$$\begin{aligned} x(h) &\coloneqq h(2t) - \min_{z\in[0,2t]} h(z), \\ y(h) &\coloneqq - \min_{z\in[0,2t]} h(z). \end{aligned} \tag{56}$$

Каждому элементарному исходу h у нас соответствует пара $(x(h), y(h))$. То есть у нас получилась случайная величина со значениями в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Обозначим соответствующую вероятностную меру на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ как ν_t.

Рассмотрим $L^2(\mathbb{R}_+)$. Пусть $AC_2^0(\mathbb{R}_+)$ — множество функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, которые дифференцируемы, производная абсолютно непрерывна, вторая производная лежит в L^2, и при этом сами функции зануляются в точке 0. Рассмотрим оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$, самосопряжённый с областью определения $AC_2^0(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим полугруппу сжатий $Z_t := e^{t\frac{d^2}{dx^2}}$. Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, эта полугруппа даёт решение $f_t := Z_t f$ уравнения теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_t(x)$ с граничным условием $f_t(0) = 0$ и начальным данным $f_0 = f$.

Определение 7 ([14])**.** *Пусть X — топологическое векторное пространство, для которого X^* разделяет точки. Пусть на пространстве с мерой τ задана функция f, принимающая значения в X. Пусть существует $y \in X$, для которого*

$$\Lambda(y) = \int \Lambda(f)\, d\tau \tag{57}$$

для произвольного $\Lambda \in X^*$. Тогда y называется интегралом функции f. Будем писать

$$y = \int f\, d\tau. \tag{58}$$

Теорема 22.

$$Z_t f = \int R_x R_{-y} f\, d\nu_t. \tag{59}$$

Замечание. Далее везде, где мы пишем интегрирование по $d\nu_t$, подразумевается, что интегрирование ведётся по переменным x, y.

Доказательство. Обозначим $f_t := Z_t f$. Продолжим f нечётным образом на $\mathbb{R}$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}_+$. Известно, что

$$f_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} f(x+a) e^{\frac{-a^2}{4t}}\, da. \tag{60}$$

Заметим, что $h(2t)$ — случайная величина с плотностью $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-a^2}{4t}}$, $a \in \mathbb{R}$. Поэтому (60) можно переписать в виде

$$f_t(x) = \int_h f(x + h(2t))\, d\mu. \tag{61}$$

Далее

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \int_h f(x + h(2t))\, d\mu = \\ &= \int_{h, x+h(2t)>0} f(x + h(2t))\, d\mu + \int_{h, x+h(2t)<0} f(x + h(2t))\, d\mu = I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{62}$$

где

$$I_1 = \int_{h, x+h(2t)>0} f(x+h(2t))\, d\mu, \tag{63}$$

$$I_2 = \int_{h, x+h(2t)<0} f(x+h(2t))\, d\mu. \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

Для каждого h определим $\tau(h) = \min\{\tau \mid x + h(\tau) = 0\}$. Определим теперь

$$h_1(a) \coloneqq \begin{cases} h(a), & a < \tau(h), \\ -2x - h(a), & a \geqslant \tau(h). \end{cases} \tag{66}$$

Применяя марковское свойство винеровского процесса (см. [11]), получаем, что h_1 имеет такое же вероятностное распределение, как и h.

В интеграле I_2 интегрирование ведётся по таким h, что $x + h(2t) < 0$. Пусть A — множество таких h. Пусть B — множество таких h, что $\min\limits_{\tau\in[0,2t]} x + h(\tau) \leqslant 0$ и $x + h(2t) > 0$. Заметим, что $h \in A$ тогда и только тогда, когда $h_1 \in B$. Для $h \in A$ выполняется $x + h(2t) = -x - h_1(2t)$. Теперь перепишем интеграл I_2:

$$I_2 = \int_{h\in A} f(x + h_1(2t))\, d\mu = \int_{h_1\in B} f(-x - h_1(2t))\, d\mu = -\int_{h_1\in B} f(x + h_1(2t))\, d\mu, \tag{67}$$

Поскольку h_1 имеет такое же распределение, как и h, перепишем это в виде

$$I_2 = -\int_{h\in B} f(x + h(2t))\, d\mu. \tag{68}$$

Теперь, складывая с первым интегралом, получаем

$$f_t(x) = \int_{h,\ \min\limits_{\tau\in[0,2t]} x+h(\tau)>0} f(x+h(2t)) d\mu. \tag{69}$$

Поскольку $h(z)$ имеет на отрезке $z \in [0, 2t]$ такое же вероятностное распределение, как и $h_2(z) \coloneqq h(2t - z) - h(2t)$, можно сделать замену:

$$f_t(x) = \int_{h_2,\ \min\limits_{\tau\in[0,2t]} x+h_2(\tau)-h_2(2t)>0} f(x - h_2(2t)) d\mu. \tag{70}$$

$$f_t(x) = \int_{h,\ \min\limits_{\tau\in[0,2t]} x+h(\tau)-h(2t)>0} f(x - h(2t)) d\mu. \tag{71}$$

Определим теперь для каждого h

$$(R_h f)(x) \coloneqq \begin{cases} f(x - h(2t)), & \min\limits_{\tau\in[0,2t]} x + h(\tau) - h(2t) > 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{72}$$

Тогда из (71) мы получаем, что

$$f_t = \int_h R_h f \, d\mu. \tag{73}$$

Осталось заметить, что

$$R_h f = R_{x(h)} R_{-y(h)} f. \tag{74}$$

$\square$

Теорема 23.

$$S_t^0[\omega] = \int R_x[R_{-y}[\omega]] \, d\nu_t. \tag{75}$$

Доказательство. Это следует из теоремы 22 и из явной формулы для полугруппы S_t^0, полученной в статье [6]. Вопрос корректности этого интеграла мы рассмотрим в разделе 6.2.

Лемма 24. *Пусть (x, y) имеет распределение ν_t. Тогда (y, x) имеет такое же распределение, как и (x, y).*

Доказательство. Пусть h — траектория броуновского движения. Достаточно заметить, что на отрезке $[0, 2t]$ процесс $h(\tau)$ имеет такое же распределение, как и процесс $h(2t) - h(2t - \tau)$. $\square$

Следствие 25. *В интегралах по $d\nu_t$ всегда можно заменять x и y местами.*

$\square$

6 Построение нестандартной полугруппы

Для каждого оператора $A \in B(H)$ определим теперь его сдвиг $\mathcal{Q}_z[A]$. Пусть $H_+ \coloneqq H = L^2(\mathbb{R}_+)$, $H_- \coloneqq L^2(\mathbb{R}_-)$, $\widetilde{H} \coloneqq H_- \oplus H_+ = L^2(\mathbb{R})$, $F(\widetilde{H}) = F(H_-) \otimes F(H_+)$. Отождествим векторы $\eta \in F(H_+)$ с векторами $\Omega \otimes \eta$, где Ω — состояние вакуума на H_-. Пусть P_+ — проектор на $\Omega \otimes F(H_+)$. На $\widetilde{H} = L^2(\mathbb{R})$ определим сдвиг вправо R_z, который будет унитарным оператором. Тогда для произвольного ограниченного оператора $A \in B(F(H))$ определим $(\mathcal{Q}_z[A])\eta \coloneqq P_+ R_z (\mathrm{Id} \otimes A) R_{-z} (\Omega \otimes \eta)$.

Заметим, что при таком определении

$$\mathcal{Q}_z[a^*(x_1) \dots a^*(x_n) a(y_1) \dots a(y_m)] = a^*(R_z x_1) \dots a^*(R_z x_n) a(R_z y_1) \dots a(R_z y_m)$$

Теперь видно, что если мы хотим построить вторичную квантизацию невозмущённой полугруппы Холево, то это можно сделать следующим образом: положим

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_t[a^*(x_1) \dots a^*(x_n) a(y_1) \dots a(y_m)] \coloneqq \\ &\int a^*(R_x R_{-y} x_1) \dots a^*(R_x R_{-y} x_n) a(R_x R_{-y} y_1) \dots a(R_x R_{-y} y_m) \, d\nu_t = \\ &\int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[a^*(x_1) \dots a^*(x_n) a(y_1) \dots a(y_m)]] \, d\nu_t. \end{aligned} \tag{76}$$

Такую же формулу можно написать для произвольного оператора $A \in B(F(H))$:

$$\mathcal{T}_t[A] \coloneqq \int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t. \tag{77}$$

При этом интеграл понимается в сильной операторной топологии: для любого функционала ξ на $B(F(H))$, непрерывного в сильной операторной топологии, должно быть верно равенство $\xi(\mathcal{T}_t[A]) = \int \xi(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\, d\nu_t$. Напомним, что все такие ξ имеют вид $\xi(A) = \sum\limits_{i=0}^{n} \langle \zeta_i | A\eta_i \rangle$ для $A \in B(H)$.

Для начала требуется доказать, что данная формула действительно задаёт динамическую полугруппу на $B(H)$. В частности, возникает вопрос корректной определённости интеграла.

Из соотношения

$$(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta = P_+ R_x(\mathrm{Id} \otimes A) R_{-x} P_+ R_{-y}(\mathrm{Id} \otimes A) R_y(\Omega \otimes \eta)$$

видно, что правая часть непрерывна по x и y. Значит, функция $(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta$ непрерывна по x и y. Значит, корректно определён интеграл $\int (\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta\, d\nu_t$. Положим $\mathcal{T}_t[A]\eta \coloneqq \int (\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta\, d\nu_t$.

Покажем, что для фиксированного A орбита $\mathcal{T}_t[A]$ непрерывна в сильной операторной топологии. Фиксируем $\eta \in F(H)$ и рассмотрим $\mathcal{T}_t[A]\eta = \int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\eta\, d\nu_t$. как функцию от t. Мы хотим понять, что она непрерывна по t. Пусть $t \to t_0$. Тогда $|\nu_t - \nu_{t_0}| \to 0$, и поэтому интегралы по мерам ν_t стремятся к интегралу по мере ν_{t_0}.

Осталось проверить, что отображение $\mathcal{T}_t$ нормальное. Проверим следующее утверждение: пусть $A_\alpha \to A$ в сильной операторной топологии и при этом $\sup \|A_\alpha\| < \infty$, тогда $\mathcal{T}_t[A_\alpha] \to \mathcal{T}[A]$ в сильной операторной топологии (здесь A_α — некоторая направленность).

Будем это доказывать. Пусть $x \to x_0$, $y \to y_0$, $A_\alpha \to A$. Из формулы $(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha]])\eta = P_+ R_x(\mathrm{Id} \otimes A_\alpha) R_{-x} P_+ R_{-y}(\mathrm{Id} \otimes A_\alpha) R_y(\Omega \otimes \eta)$ видно, что правая часть стремится к пределу, равному $P_+ R_{x_0}(\mathrm{Id} \otimes A) R_{-x_0} P_+ R_{-y_0}(\mathrm{Id} \otimes A) R_{y_0}\eta = (\mathcal{Q}_{x_0}[\mathcal{Q}_{-y_0}[A]])\eta$. Итак, $(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha]])\eta \to (\mathcal{Q}_{x_0}[\mathcal{Q}_{-y_0}[A]])\eta$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и α_0, такие, что при $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $\alpha > \alpha_0$, выполняется неравенство $\|(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha]])\eta - (\mathcal{Q}_{x_0}[\mathcal{Q}_{-y_0}[A]])\eta\| < \varepsilon$. Зафиксируем ε и для каждой точки (x_0, y_0) найдём такие $\delta(x_0, y_0)$ и $\alpha_0(x_0, y_0)$. Более того, будем брать $\delta(x_0, y_0)$ настолько маленьким, чтобы $\|(\mathcal{Q}_{x_0}[\mathcal{Q}_{-y_0}[A]])\eta - (\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta\| < \varepsilon$. Затем рассмотрим окрестности радиуса $\delta(x_0, y_0)$ у точек (x_0, y_0). Заметим, что внутри такой окрестности при $\alpha > \alpha_0(x_0, y_0)$ выполняется $\|(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha]])\eta - (\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta\| < 2\varepsilon$.

Рассмотрим произвольный компакт $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Окрестности радиуса $\delta(x_0, y_0)$ у точек (x_0, y_0) образуют покрытие такого компакта, поэтому из них можно выбрать конечное подпокрытие. Каждой окрестности из этого конечного покрытия соответствует некоторое $\alpha_0(x_0, y_0)$, можно выбрать максимум $\alpha_0 \coloneqq \max \alpha_0(x_0, y_0)$. Получится, что на K при $\alpha > \alpha_0$ выполнено неравенство $\|(\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha] - \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]])\eta\| < 2\varepsilon$. Значит, при $A_\alpha \to A$ интегралы $\int_K \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha]]\eta\, d\nu_t$ стремятся к интегралу $\int_K \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\eta\, d\nu_t$.

Берём компакты K_n, такие, что $\nu_t(K_n) \to 1$ и получаем, что $\int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A_\alpha]]\eta\, d\nu_t \to \int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\eta\, d\nu_t$. А это и означает, что $\mathcal{T}_t[A_\alpha] \to \mathcal{T}[A]$ в сильной операторной топологии.

6.1 Предсопряжённая полугруппа

Теперь мы уже доказали, что $\mathcal{T}_t$ является динамической полугруппой. Значит, можно рассмотреть предсопряжённую полугруппу $\mathcal{S}_t[A]$. Генератор предсопряжённой полугруппы будем обозначать $\mathcal{M}[\omega]$. Далее будем обозначать $\omega^t \coloneqq \mathcal{S}_t[\omega]$.

Рассмотрим нормальное вполне положительное отображение $\mathcal{Q}_x\colon A \mapsto \mathcal{Q}_x[A]$. Ему соответствует некоторое предсопряжённое отображение, которое мы будем обозначать $\mathcal{W}_{-x}$.

Лемма 26.

$$\mathcal{S}_t[\omega] = \int \mathcal{W}_y[\mathcal{W}_{-x}[\omega]]\, d\nu_t, \tag{78}$$

где интеграл понимается в следующем смысле: для любого $A \in B(H)$ выполнено

$$\operatorname{Tr} \mathcal{S}_t[\omega]A = \int \operatorname{Tr} \mathcal{W}_y[\mathcal{W}_{-x}[\omega]]A\, d\nu_t. \tag{79}$$

Доказательство.

$$\operatorname{Tr} \mathcal{S}_t[\omega]A = \operatorname{Tr} \omega\mathcal{T}_t[A] = \operatorname{Tr} \omega \int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t. \tag{80}$$

Распишем ядерный оператор в разложение Гильберта–Шмидта: $\omega = \sum |\zeta_i\rangle\langle\eta_i|$. Тогда $\operatorname{Tr}\omega \int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t = \sum \operatorname{Tr} |\zeta_i\rangle\langle\eta_i| \int \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t = \sum \int \operatorname{Tr} |\zeta_i\rangle\langle\eta_i|\, \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t = \int \sum \operatorname{Tr} |\zeta_i\rangle\langle\eta_i|\, \mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t = \int \operatorname{Tr} \omega\mathcal{Q}_x[\mathcal{Q}_{-y}[A]]\, d\nu_t = \int \operatorname{Tr} \mathcal{W}_y[\mathcal{W}_{-x}[\omega]]A\, d\nu_t$. □

Лемма 27. *Если ω имеет тип (i,j), то $\mathcal{S}_t[\omega]$ является линейной комбинацией ядерных операторов типов (i,j), $(i-1, j-1)$, $\ldots (i - \min(i,j), j - \min(i,j))$.*

Доказательство. Это следует из леммы 26 и леммы 11. □

Лемма 28. *Пусть ω имеет тип (i,j). Обозначим $\tau \coloneqq \mathcal{W}_x[\omega]$. Тогда $\tau_{ij} = R_x[\omega]$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для любых $a^*(x_1)\ldots a^*(x_i)a(y_1)\ldots a(y_j)$ выполнено

$$\operatorname{Tr} R_x[\omega]a^*(x_1)\ldots a^*(x_i)a(y_1)\ldots a(y_j) = \operatorname{Tr}\omega a^*(R_{-x}x_1)\ldots a^*(R_{-x}x_i)a(R_{-x}y_1)\ldots a(R_{-x}y_j).$$

Проверять это равенство достаточно для $\omega = |f_j\rangle\langle g_i|$. □

Следствие 29. *Из леммы 28, леммы 26, теоремы 22 и явной формулы для полугруппы S_t^0 из статьи [6] следует, что $\mathcal{S}_t$ совпадает с S_t^0 на одночастичном пространстве.*

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим множество бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n_+$, которые зануляются на границе и имеют компактный носитель. Будем обозначать множество таких функций E_n. Множество финитных функций из E_n (то есть тех, у которых носитель отделён от границы) будем обозначать G_n.

Лемма 30. *Пусть $f \in E_n$. Рассмотрим $f_t = \int R_x R_{-y} f \, d\nu_t$. Тогда $\frac{f_t - f}{t} \to f''$ в L^2, где f'' понимается как вторая производная вдоль направления $(1, \dots, 1)$.*

Доказательство. Поскольку все производные берутся вдоль фиксированного направления и все сдвиги тоже идут вдоль этого направления, достаточно разобрать случай $n = 1$. Этот случай следует из теоремы 22. □

Лемма 31. *Если ω имеет тип (i, j), то $\frac{1}{t}(\omega^t_{ij} - \omega_{ij})$ стремится при $t \to 0$ в смысле обобщённых функций к ω''_{ij}, где ω''_{ij} — вторая производная ω_{ij} вдоль направления $(1, \dots, 1)$.*

Доказательство. Возьмём какую-нибудь функцию $f \in G_{i+j}$. Заметим, что ω является ядерным оператором, следовательно, оператором Гильберта–Шмидта. Значит, ω можно рассматривать как L^2 функцию на $\mathbb{R}^{i+j}_+$. При этом интегралы $\int R_x[R_{-y}[\omega]] \, d\nu_t$ можно понимать как интегралы в пространстве L^2. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(\omega_t - \omega, f) = \frac{1}{t}\int (R_x[R_{-y}[\omega]] - \omega, f) \, d\nu_t = \frac{1}{t}\int (\omega, R_y R_{-x} f - f) \, d\nu_t = \\ = \left(\omega, \frac{1}{t}\left(\int R_y R_{-x} f \, d\nu_t\right) - f\right) \to (\omega, f''). \end{aligned} \tag{81}$$

□

Лемма 32. *Пусть f имеет тип n и $f \in D_n$. Тогда $\|(I - R_a R_{-a}) f\| = o(a)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|(I - R_a R_{-a}) f\|^2 &= \int_0^a dt \int_{x \in \partial\mathbb{R}^n_+} |f(x+t)|^2 dx = \\ &= \int_0^a dt \int_{x \in \partial\mathbb{R}^n_+} \left| \int_0^t d\tau f'(x+\tau) \right|^2 dx \leqslant \\ &\leqslant \int_0^a dt \int_{x \in \partial\mathbb{R}^n_+} t \int_0^t d\tau |f'(x+\tau)|^2 dx = \\ &= \int_0^a t dt \|(I - R_t R_{-t}) f'\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \int_0^a t dt \|(I - R_a R_{-a}) f'\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \|(I - R_a R_{-a}) f'\|^2 = o(a^2). \end{aligned} \tag{82}$$

□

Лемма 33. *Пусть f имеет тип i, а g имеет тип j. Рассмотрим ядерный оператор $\omega = |f\rangle\langle g|$. Если $f, g \in \mathcal{D}$, $n \neq i$ или $m \neq j$, то $\frac{1}{t}(\omega_{mn}^t - \omega_{mn}) \to 0$ при $t \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим $\omega^t = \int \mathcal{W}_a[\mathcal{W}_{-b}[\omega]]\, d\nu_t$. Распишем $\omega = \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$, где $\xi_1 = |R_bR_{-b}f\rangle\langle R_bR_{-b}g|$, $\xi_2 = |(I-R_bR_{-b})f\rangle\langle R_bR_{-b}g|$, $\xi_3 = |R_bR_{-b}f\rangle\langle (I-R_bR_{-b})g|$, $\xi_4 = |(I-R_bR_{-b})f\rangle\langle (I-R_bR_{-b})f|$.

Заметим, что первое слагаемое под действием $\mathcal{W}_a\mathcal{W}_{-b}$ переходит в $|R_aR_{-b}f\rangle\langle R_aR_{-b}g|$, то есть не влияет на компоненту типа (m, n).

Разберёмся теперь с ξ_2 (слагаемое ξ_3 разбирается аналогично). А именно, докажем, что $\mathcal{W}_{-b}\xi_2 = 0$. Будем использовать лемму 8. Нам нужно доказать, что для любого $a^*(x_1)\dots a^*(x_k)a(y_1)\dots a(y_l)$ выполнено $\operatorname{Tr}\xi_2 a^*(R_bx_1)\dots a^*(R_bx_k)a(R_by_1)\dots a(R_by_l) = 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}\xi_2 a^*(R_bx_1)\dots a^*(R_bx_k)a(R_by_1)\dots a(R_by_l) = \\
&= \operatorname{Tr} a(R_by_1)\dots a(R_by_l)\xi_2 a^*(R_bx_1)\dots a^*(R_bx_k) = \\
&= \operatorname{Tr} a(R_by_1)\dots a(R_by_l)\, |(I-R_bR_{-b})f\rangle\langle R_bR_{-b}g|\, a^*(R_bx_1)\dots a^*(R_bx_k) = \\
&= \operatorname{Tr} |a(R_by_1)\dots a(R_by_l)(I-R_bR_{-b})f\rangle\langle a(R_bx_k)\dots a(R_bx_1)R_bR_{-b}g|\,.
\end{aligned} \tag{83}$$

Осталось заметить, что $a(R_by_1)\dots a(R_by_l)(I-R_bR_{-b})f \perp a(R_bx_k)\dots a(R_bx_1)R_bR_{-b}g$.

Итак, мы поняли, что слагаемые ξ_1, ξ_2, ξ_3 вносят нулевой вклад в $\omega_{m,n}^t$. Осталось понять, что последнее слагаемое ξ_4 вносит маленький вклад. Для этого применим лемму 32. У нас получается, что последнее слагаемое вносит вклад не больше $\int_{x,y} o(y^2)\, d\nu_t = o(t)$. Поэтому $\omega_{mn}^t - \omega_{mn} = o(t)$. □

Лемма 34. *Пусть $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ абсолютно непрерывны, $f', g' \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и $f(0) = g(0) = 0$. Если $f''(x)g(y) + f(x)g''(y) \in L^2$, то $f''(x)g(y) \in L^2$ и $\|f''(x)g(y)\|_2 \leqslant \|f''(x)g(y) + f(x)g''(y)\|_2$.*

Доказательство. Продолжим функции f', g' нечётным образом на $\mathbb{R}$. Тогда функции $f(x)g(y)$, $f''(x)g(y)$ и $f(x)g''(y)$ будут продолжены нечётным образом на $\mathbb{R}^2$. Заметим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x)g(y)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x)g(y)) = f''(x)g(y) + f(x)g''(y). \tag{84}$$

Здесь мы применили $f(0) = g(0) = 0$ (иначе бы вылезли производные дельта-функций). Теперь достаточно доказать неравенство

$$\|f''(x)g(y)\|_2 \leqslant \|f''(x)g(y) + f(x)g''(y)\|_2 \tag{85}$$

для продолженных таким образом функций.

Сделаем теперь преобразование Фурье. Неравенство преобразуется в неравенство

$$\int_{x,y} x^4|\hat{f}(x)\hat{g}(y)|^2\, dxdy \leqslant \int_{x,y} (x^4|\hat{f}(x)\hat{g}(y)|^2 + y^4|\hat{f}(x)\hat{g}(y)|)\, dxdy, \tag{86}$$

которое верно. □

Лемма 35. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$. Пусть $f', g' \in L^2$, где производная берётся вдоль диагонали, $f(x) = 0$ для $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$, $g(y) = 0$ для $y \in \partial\mathbb{R}_+^m$. Если $f''(x)g(y)+f(x)g''(y) \in L^2$, то $f''(x)g(y) \in L^2$ и $\|f''(x)g(y)\|_2 \leqslant \|f''(x)g(y)+f(x)g''(y)\|_2$ (все вторые производные тоже понимаются вдоль диагонали).*

Доказательство. Это следствие леммы 34. □

Лемма 36. *Пусть $f = f_n$ имеет тип n, $g = g_m$ имеет тип m. Пусть $|f\rangle\langle g| \in \operatorname{dom}\mathcal{M}$. Тогда $f, g \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Обозначим $\omega \coloneqq |f\rangle\langle g|$, $\tau \coloneqq \mathcal{M}[\omega]$. По лемме 31 мы получаем, что обобщённая вторая производная функции $\omega = |f\rangle\langle g|$ по направлению $(1, \ldots, 1)$ равна $\tau_{m,n}$. Значит, вторая производная является ядром ядерного оператора. В частности, вторая производная лежит в L^2. Значит, ω можно поменять на множестве меры ноль, чтобы для любых $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ функция $\omega(x_1+t, \ldots, x_m+t, y_1+t, \ldots, y_n+t)$ лежала в W_2^2.

Возьмём произвольную функцию $\eta \in E_n$. Функции η, $\tau_{m,n}$, $\omega_{m,n}$ можно рассматривать как функции из L^2 и писать их скалярные произведения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(\omega_{m,n}^t - \omega, \eta) = \frac{1}{t}\int (R_x[R_{-y}[\omega_{m,n}]] - \omega_{n,n}, \eta)\, d\nu_t = \frac{1}{t}\int (\omega_{m,n}, R_y R_{-x}\eta - \eta)\, d\nu_t = \\ = \left(\omega_{m,n}, \frac{1}{t}\left(\int R_y R_{-x}\eta\, d\nu_t - \eta\right)\right) \to (\omega_{m,n}, \eta'').\end{aligned} \tag{87}$$

С другой стороны, мы знаем, что $\frac{1}{t}(\omega_{m,n}^t - \omega, \eta) \to (\tau_{m,n}, \eta)$. И при этом мы знаем, что $\tau_{m,n} = \omega_{m,n}''$. Таким образом, $(\omega_{m,n}, \eta'') = (\omega_{m,n}'', \eta)$.

Возьмём $(\omega_{m,n}, \eta'')$ и проинтегрируем по частям два раза. Вылезет лишнее слагаемое $\int_{\partial\mathbb{R}_+^{n+m}} \omega_{m,n} \cdot \eta'$. Оно должно зануляться. Поскольку η' может быть любым, отсюда следует, что $\omega_{m,n}$ зануляется на границе. То есть $\omega_{m,n} \in D_{n+m}$.

Докажем теперь, что $g' \in L^2$. Заметим, что

$$\omega(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_m)}\, g(y_1, \ldots, y_n).$$

Для преобразований Фурье верно аналогичное равенство:

$$\hat{\omega}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \overline{\hat{f}(-x_1, \ldots, -x_n)}\, \hat{g}(y_1, \ldots, y_n).$$

Из $\omega' \in L^2$ мы получаем, что

$$\overline{\hat{f}(-x_1, \ldots, -x_n)}\, \hat{g}(y_1, \ldots, y_n)(x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_n) \in L^2,$$

то есть

$$\int_x |\hat{f}(x_1, \ldots, x_m)|^2 \int_y |\hat{g}(y_1, \ldots, y_n)|^2 (-x_1 - \ldots - x_m + y_1 + \ldots + y_n)^2 < \infty$$

Значит, для некоторого x интеграл по y сходится:

$$\int_y |\hat{g}(y_1, \ldots, y_n)|^2(-x_1 - \ldots - x_m + y_1 + \ldots + y_n)^2 < \infty$$

Но тогда он сходится и для $x = 0$:

$$\int_y |\hat{g}(y_1, \ldots, y_n)|^2(y_1 + \ldots + y_n)^2 < \infty$$

А это и означает, что $g' \in L^2$. Аналогично можно доказать, что $f' \in L^2$. Равенство f нулю на границе (а также равенство g нулю на границе) теперь несложно следует из равенства нулю на границе функции $\omega_{m,n}$.

Осталось доказать, что $f'' \in L^2$ (аналогично доказывается, что $g'' \in L^2$).

Мы уже знаем

$$\omega''(x, y) = \overline{f}''(x)g(y) + \overline{f}(x)g''(y) + 2\overline{f}'(x)g'(y) \in L^2. \tag{88}$$

Кроме того, $f', g' \in L^2$, поэтому

$$\overline{f}''(x)g(y) + \overline{f}(x)g''(y) \in L^2. \tag{89}$$

Применяя к функциям $\overline{f}$ и g лемму 35, мы получаем, что $\overline{f}''(x)g(y) \in L^2$, значит, $f'' \in L^2$, что мы и хотели. □

Замечание. Мы рассматривали только ω_{mn}^t. Поэтому условие $|f\rangle\langle g| \in \operatorname{dom}\mathcal{M}$ можно ослабить: достаточно потребовать существование предела $\frac{1}{t}(\omega_{mn}^t - \omega_{mn})$ по норме ядерных операторов.

Лемма 37. *Пусть $f = (f_0, \ldots, f_n)$ является линейной комбинацией векторов типов 0, 1, …, n, $g = (g_0, \ldots, g_m)$ является линейной комбинацией векторов типов 0, 1, …, m (для определённости считаем $f_n \neq 0$, $g_m \neq 0$). Пусть $|f\rangle\langle g| \in \operatorname{dom}\mathcal{M}$. Тогда $f, g \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 36 и замечание после неё для пар векторов f_n, g_i и f_i, g_m. При этом нужно иметь в виду лемму 11. □

6.2 Полугруппа $\widetilde{\mathcal{T}}_t$

Рассмотрим $\widetilde{\mathcal{S}}_t[\omega] \coloneqq \int R_x[R_{-y}[\omega]]\, d\nu_t$. Заметим, что $R_x[\omega] = R_x\omega R_{-x}$. Итак,

$$R_x[R_{-y}[\omega]] = R_x R_{-y} \omega R_y R_{-x} \tag{90}$$

непрерывно по x и y (чтобы это понять, надо рассмотреть разложение Гильберта–Шмидта оператора ω). Поэтому интеграл корректно определён и задаёт некоторую полугруппу, которая будет иметь непрерывные орбиты. Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}_t[A]$ — сопряжённая полугруппа.

У отображения R_x, заданного на множестве ядерных операторов, есть сопряжённое отображение, заданное по формуле $V_x \colon A \mapsto R_{-x}AR_x$.

Лемма 38. *Полугруппа* $\widetilde{\mathcal{T}}_t[A]$ *состоит из вполне положительных отображений. При этом* $\widetilde{\mathcal{T}}_t[A] = \int V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t$.

Доказательство. У отображения $R_x \circ R_{-y}$ сопряжённое отображение будет равно $V_y \circ V_{-x}$. Видно, что такое отображение вполне положительно. Фиксируем ограниченный оператор A. Ясно, что $V_y[V_{-x}[A]]$ непрерывно в сильной операторной топологии по x и по y. Тогда корректно определён интеграл $\int V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t$.

Пусть $\omega = \sum |\zeta_i\rangle\langle\eta_i|$. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\omega \int V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t &= \sum \operatorname{Tr}|\zeta_i\rangle\langle\eta_i| \int V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t = \\ &= \sum \int \operatorname{Tr}|\zeta_i\rangle\langle\eta_i| V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t = \int \sum \operatorname{Tr}|\zeta_i\rangle\langle\eta_i| V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t = \\ &= \int \operatorname{Tr}\omega V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t = \int \operatorname{Tr} R_x[R_{-y}[\omega]]A\,d\nu_t.\end{aligned} \tag{91}$$

Из этой цепочки равенств видно, что $\widetilde{\mathcal{T}}_t[A] = \int V_y[V_{-x}[A]]\,d\nu_t$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ вполне положительно. □

Следовательно, $\widetilde{\mathcal{S}}_t$ является динамической полугруппой.

Полугруппа $\widetilde{\mathcal{S}}_t$ будет, очевидно, неконсервативной (видно, что след не сохраняется). Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}[\omega]$ — генератор $\widetilde{\mathcal{S}}_t$.

Утверждение 39. *Из леммы 28 следует, что полугруппы похожи друг на друга в следующем смысле. Если* ω *имеет тип* (m,n), *то* $\mathcal{S}_t[\omega]_{m,n} = \widetilde{\mathcal{S}}_t[\omega]_{m,n}$. *Отличие состоит в следующем. Полугруппа* $\widetilde{\mathcal{S}}_t$ *переводит ядерный оператор типа* (m,n) *в ядерный оператор типа* (m,n). *А полугруппа* $\mathcal{S}_t$ *добавляет ещё линейную комбинацию ядерных операторов типов* $(m-1,n-1)$, $(m-2,n-2)$, $\ldots$, $(m-\min(m,n), n-\min(m,n))$.

Следствие 40. *Полугруппа* $\widetilde{\mathcal{S}}_t$ *совпадает с* S_t^0 *на одночастичном пространстве. См. следствие 29.*

6.3 Сужения полугрупп и доказательство их нестандартности

Из леммы 11 следует, что существует сужение полугрупы $\mathcal{S}_t$ на подпространство $\mathcal{H}_n := \sum\limits_{i=0}^{n} H^{\otimes_a i}$. Обозначим это сужение как $\mathcal{S}_t^n$. Сопряжённую полугруппу обозначим $\mathcal{T}_t^n$. Аналогично существует сужение $\widetilde{\mathcal{S}}_t^n$ и соответствующая сопряжённая полугруппа $\widetilde{\mathcal{T}}_t^n$.

Лемма 41. *У полугрупп* $\widetilde{\mathcal{S}}_t^n$ *и* $\mathcal{S}_t^n$ *генераторы совпадают на операторах ранга 1.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\omega \coloneqq |f\rangle\langle g|$ ранга 1. Пусть $\omega \in \operatorname{dom}\mathcal{M}$. Тогда по лемме 37 мы получаем, что $f, g \in \mathcal{D}$. Далее по лемме 33 и из утверждения 39 мы получаем, что $\widetilde{\mathcal{M}}[\omega] = \mathcal{M}[\omega]$.

Обратно, пусть $\omega \in \operatorname{dom}\widetilde{\mathcal{M}}$. Ясно, что для $\widetilde{\mathcal{S}}_t$ можно доказать аналог леммы 37. Дальше доказательство аналогично предыдущему случаю. □

Мы докажем, что $\mathcal{T}_t^n$ нестандартна. Предположим противное: существуют такие операторы K, L_j, заданные на $\operatorname{dom} K$, что выполняются условия теоремы 4 и при этом $\mathcal{T}_t^n$ является минимальным решением уравнения (3), существование которого гарантируется теоремой 4. Заметим, что полугруппа $\mathcal{T}_t^n$ унитальна, а значит, по теореме 5, она является единственным решением уравнения Линдблада. Полугруппа $\mathcal{S}_t^n$ является единственным решением уравнения (4).

Пусть $f, g \in \operatorname{dom} K$. Тогда $|f\rangle\langle g| \in \operatorname{dom}\mathcal{M}$, следовательно по лемме 41 мы получаем $|f\rangle\langle g| \in \operatorname{dom}\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}[|f\rangle\langle g|] = \widetilde{\mathcal{M}}[|f\rangle\langle g|]$.

Уравнение Линдблада (4) задано в данном случае при $\varphi, \psi \in \operatorname{dom} K$. Заметим, что для таких φ, ψ мы только что доказали $\widetilde{\mathcal{M}}[|\varphi\rangle\langle\psi|] = \mathcal{M}[|\varphi\rangle\langle\psi|]$. То есть получается, что $\widetilde{\mathcal{S}}_0^n$ удовлетворяет точно такому же уравнению. Из единственности решения $\mathcal{S}_t^n$ мы получаем $\mathcal{S}_t^n = \widetilde{\mathcal{S}}_t^n$. А это противоречие, потому что одно из них консервативно, а другое — нет.

6.4 О доказательстве нестандартности полугруппы $\mathcal{T}_t$

Определение 8 ([14])**.** *Пусть X — банахово пространство, $A_t\colon X \to X$ — сильно непрерывная полугруппа операторов на X. Тогда*

$$\mathcal{R}_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A_t \, dt \tag{92}$$

называется резольвентой этой полугруппы.

Лемма 42 ([14])**.**

$$\mathcal{R}_\lambda = (\lambda \mathrm{Id} - B)^{-1}, \tag{93}$$

где B — генератор полугруппы A_t.

Пусть $x \in \partial\mathbb{R}^{n+m}$. Определим $J(\omega, x)(t) \coloneqq \omega_{n,m}(x_1 + t, \ldots, x_{n+m} + t)$.

Для начала изучим, как действует генератор полугруппы $\widetilde{\mathcal{S}}_t$ на операторы ранга 1.

Лемма 43. *Пусть $f = f_i \in D_i$, $g = g_j \in D_j$ имеют тип i и j соответственно. Тогда $|f\rangle\langle g| \in \operatorname{dom}\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}[|f\rangle\langle g|] = 2\,|f'\rangle\langle g'| + |f''\rangle\langle g| + |f\rangle\langle g''|$.*

Доказательство. Рассмотрим резольвенту $\mathcal{R}_\lambda$ полугруппы $\widetilde{\mathcal{S}}_t$. Пусть $\omega \coloneqq |f\rangle\langle g|$, $\tau \coloneqq |f\rangle\langle g| - 2\,|f'\rangle\langle g'| - |f''\rangle\langle g| - |f\rangle\langle g''|$. Наша цель — доказать, что $\mathcal{R}_1[\tau] = \omega$. Отсюда и из леммы 42 будет следовать требуемое.

Заметим, что $\tau = \omega - \omega''$, где вторая производная как обычно берётся вдоль диагонали $(1, \dots, 1, 1)$.

Пусть $\mathcal{C}_\lambda$ — резольвента полугруппы Z_t, которая определялась в разделе 5. Пусть $x \in \partial \mathbb{R}^{j+i}$. Заметим, что

$$J(\mathcal{R}_1[\tau], x) = \mathcal{C}_1[J(\tau, x)] = \mathcal{C}_1[J(\omega - \omega'', x)] = \mathcal{C}_1[J(\omega, x) - J(\omega, x)'']. \tag{94}$$

Поскольку $\mathcal{C}_\lambda$ — резольвента полугруппы Z_t, из леммы 42 мы получаем, что

$$\mathcal{C}_1[J(\omega, x) - J(\omega, x)''] = J(\omega, x). \tag{95}$$

Итак, для любого $x \in \partial \mathbb{R}^{j+i}$ мы доказали, что

$$J(\mathcal{R}_1[\tau], x) = J(\omega, x). \tag{96}$$

Значит, $\mathcal{R}_1[\tau] = \omega$, что мы и хотели. $\square$

Лемма 44. *Пусть $f, g \in \mathcal{D}$. Тогда $|f\rangle \langle g| \in \operatorname{dom} \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}[|f\rangle \langle g|] = 2\,|f'\rangle \langle g'| + |f''\rangle \langle g| + |f\rangle \langle g''|$.*

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_i f_i$, $g = \sum\limits_j g_j$, где $f_i \in D_i$, $g_j \in D_j$. Заметим, что $|f\rangle \langle g| = \sum\limits_{i,j} |f_i\rangle \langle g_j|$. Применим теперь лемму 43 и сделаем предельный переход. Предельный переход корректен, потому что генератор полугруппы — замкнутый оператор. $\square$

Лемма 45. *Пусть $|f\rangle \langle g| \in \operatorname{dom} \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда $f, g \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 36. $\square$

Теперь изучим генератор полугруппы $\mathcal{S}_t$.

Лемма 46. *Пусть $f = f_i \in D_i$, $g = g_j \in D_j$ имеют тип i и j соответственно. Тогда $|f\rangle \langle g| \in \operatorname{dom} \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}[|f\rangle \langle g|] = 2\,|f'\rangle \langle g'| + |f''\rangle \langle g| + |f\rangle \langle g''|$.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 43, утверждение 39 и лемму 33. $\square$

Лемма 47. *Пусть $f, g \in \mathcal{D}$. Тогда $|f\rangle \langle g| \in \operatorname{dom} \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}[|f\rangle \langle g|] = 2\,|f'\rangle \langle g'| + |f''\rangle \langle g| + |f\rangle \langle g''|$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 44. $\square$

Трудности возникают при попытке доказать следующее утверждение:

Гипотеза 1. *Пусть $|f\rangle \langle f| \in \operatorname{dom} \mathcal{M}$. Тогда $f \in \mathcal{D}$.*

Замечание. Это утверждение похоже на лемму 37, однако там мы существенно пользовались тем, что f и g содержат только компоненты ограниченного типа. Здесь повторить то же самое рассуждение не получается.

Если эта гипотеза будет доказано, то мы сможем доказать, что $\mathcal{T}_t$ нестандартна. Действительно, предположим противное: существуют такие операторы K, L_j, заданные на $\operatorname{dom} K$, что выполняются условия теоремы 4 и при этом $\mathcal{T}_t$ является минимальным решением уравнения (3), существование которого гарантируется теоремой 4. Заметим, что полугруппа $\mathcal{T}_t$ унитальна, а значит, по теореме 5, она является единственным решением уравнения Линдблада. Полугруппа $\mathcal{S}_t$ является единственным решением уравнения (4).

Пусть $f \in \operatorname{dom} K$. Тогда $|f\rangle\langle f| \in \operatorname{dom} \mathcal{M}$, следовательно по гипотезе 1 мы получаем $f \in \mathcal{D}$.

Уравнение Линдблада (4) задано в данном случае при $\varphi, \psi \in \operatorname{dom} K$. Заметим, что для таких φ, ψ мы только что доказали $f, g \in \mathcal{D}$. По леммам 47 и 44 мы получаем, что $\mathcal{M}[|f\rangle\langle g|] = \widetilde{\mathcal{M}}[|f\rangle\langle g|]$.То есть получается, что $\widetilde{\mathcal{S}}_0$ удовлетворяет точно такому же уравнению. Из единственности решения $\mathcal{S}_t$ мы получаем $\mathcal{S}_t = \widetilde{\mathcal{S}}_t$. А это противоречие, потому что одно из них консервативно, а другое — нет.

7 Стандартная полугруппа на пространстве Фока

На $\mathcal{D}$ зададим оператор дифференцирования B вдоль направления $(1, \ldots, 1)$. Для $\eta \in \mathcal{D}$ верно равенство $\eta' := B\eta$. Заметим, что $K_0 := -B^2$ — самосопряжённый оператор, заданный на $\mathcal{D}$. Определим также $L_0 = \sqrt{2}B$. Тогда $\|L_0\psi\|^2 = 2\langle\psi|K|\psi\rangle > 0$ для любого $\psi \in D$. Поэтому условие (2) выполняется.

Рассмотрим теперь динамическую полугруппу $\mathcal{T}_t^0$, заданную дифференциальным уравнением Линдблада:

$$\frac{d}{dt}\left\langle f|\mathcal{T}_t^0[X]|g\right\rangle = 2\left\langle f'|\mathcal{T}_t^0[X]|g'\right\rangle + \left\langle f''|\mathcal{T}_t^0[X]|g\right\rangle + \left\langle f|\mathcal{T}_t^0[X]|g''\right\rangle, \quad f, g \in \mathcal{D} \tag{97}$$

Решение этого уравнения существует по теореме 4.

Рассмотрим предсопряжённую полугруппу $\mathcal{S}_t^0$. Обозначим инфинитезимальный генератор этой полугруппы как $\mathcal{M}^0[\omega]$.

Утверждение 48.

$$\mathcal{M}^0[|f\rangle\langle g|] = 2|f'\rangle\langle g'| + |f''\rangle\langle g| + |f\rangle\langle g''|, \quad f, g \in \mathcal{D} \tag{98}$$

Доказательство. Это следует из утверждения 6. □

Утверждение 49. *Пусть $\omega = |f\rangle\langle g|$, $f, g \in \mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{M}^0$ переводит $\omega = (\omega_{ij})$ в $\omega'' = (\omega''_{ij})$, где $\omega''_{ij}(x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j) = \frac{d^2}{dt^2}\omega_{ij}(x_1 + t, \ldots, x_i + t, y_1 + t, \ldots, y_j + t)|_{t=0}$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\omega_{ij}(x+t,y+t)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}(\overline{g}(x+t)f(y+t))|_{t=0} = \\
&= \left(\frac{d^2}{dt^2}\overline{g}(x+t)|_{t=0}\right) f(y) + \overline{g}(x)\left(\frac{d^2}{dt^2}f(y+t)|_{t=0}\right) + \\
&+ 2\left(\frac{d}{dt}\overline{g}(y+t)|_{t=0}\right)\left(\frac{d}{dt}f(y+t)|_{t=0}\right) = \\
&\overline{g}''(x)f(y) + \overline{g}(x)f''(y) + 2\overline{g}'(x)f'(y) = |f\rangle\langle g''| + |f''\rangle\langle g| + 2|f'\rangle\langle g'|\,.
\end{aligned} \tag{99}$$

□

Гипотеза 2. $\widetilde{\mathcal{T}}_t = \mathcal{T}_t^0$.

Замечание. Из леммы 44 мы получаем, что $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ является решением уравнения (97). Гипотеза состоит в том, что на самом деле $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ является минимальным решением этого уравнения.

8 Заключение

Рассмотрена конструкция вполне положительной полугруппы на CAR-алгебре, построенной с помощью полугруппы сжатий на одночастичном пространстве. Для некоторых полугрупп сжатий доказана стандартность полученной вполне положительной полугруппы. Невозмущённая полугруппа из статьи [6] задана с помощью интеграла по путям винеровского процесса. Аналогично построена полугруппа на $B(F(H))$. Изучен вопрос нестандартности полученной полугруппы.

Список литературы

[1] W. Arendt, C. Batty, Matthias. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhauser, 2001.

[2] O. Bratteli, D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1.*, Springer, 2002.

[3] O. Bratteli, D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2.*, Springer, 2002.

[4] G. F. Dell'Antonio, *On the Limits of Sequences of Normal States*, Communications on pure and applied Mathematics, Vol XX, 413-429, 1967.

[5] D. E. Evans, *Completely Positive Quasi-Free Maps on the CAR Algebra*, Commun. math. Phys. 70, 1979.

[6] A. S. Holevo, *On singular perturbations of quantum dynamical semigroups*, https://arxiv.org/abs/1706.04866v5.

[7] A. S. Holevo, *On dissipative stochastic equations in a Hilbert space*, Probab. Theory Rel. Fields 104, 483-500, 1996.

[8] A. S. Holevo, *Квантовая вероятность и квантовая статистика*, Итоги науки и техн. Соврем, пробл. матем. Фундам. направления. т.83. С. 3—132, ВИНИТИ, 1991.

[9] A. S. Holevo, *Statistical Structure of Quantum Theory*, Springer, 2001.

[10] N. M. Hugenholtz, R. V. Kadison, *Automorphisms and Quasi-Free States of the CAR Algebra.*, Commun. math. Phys. 43, 181—197, 1975.

[11] L. B. Koralov, Y. G. Sinai, *Theory of Probability and Random Processes*, Springer, 2007.

[12] G. Lindblad, *On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups*, Communications in Mathematical Physics, 1976.

[13] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis and self-adjointness*, AP, NY 1975.

[14] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1991.